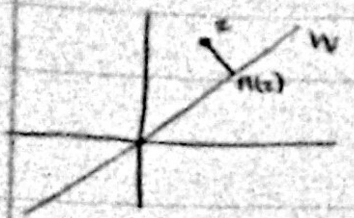
19/03/2015



$\pi: V \to W$. Αν $e=(e_1,\dots,e_p)$ γραμμική ορθοκανονική βάση του W, τότε $\pi(z)=\sum_{i=1}^{p} \langle z,e_i\rangle e_i$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 134

Έστω $V=\mathbb{R}^3$ με το συνήθες εσωτερικό γινόμενο και $W=\langle(1,0,0),(1,1,1)\rangle$

Βρείτε την απεικόνιση ορθογώνιας προβολής $\pi: V \to W$

ΛΥΣΗ

ΒΗΜΑ 1º Αφού βαθμίδα $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2$

Τα $g_1=(1,0,0)$ $g_2=(1,1,1)$ είναι γραμμ. ανεξ. άρα βάση του W θέτουμε $g=(g_1,g_2)$

ΒΗΜΑ 2º: Αφού η βάση g δεν είναι ορθοκανονική εφαρμόζω Gram-Schmidt στην g και μετά τις πράξεις βρίσκω ορθοκανονική βάση e $(e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}))$

ΒΗΜΑ 3º Από ορισμό 133 για $z=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ έχουμε $\pi(z)=\pi((a,b,c)) =$ $\langle(a,b,c)e_1\rangle e_1+\langle(a,b,c)e_2\rangle e_2 = ae_1+(b/\sqrt{2}+c/\sqrt{2}) = (a(1,0,0)+$ $+(b/\sqrt{2}+c/\sqrt{2})(0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}) = (a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2})$

Για παράδειγμα, το σημείο του W που είναι πιο κοντά στο $(3,4,5)\in\mathbb{R}^3$ είναι το $\pi((3,4,5)) = (3, 9/2, 9/2)$

ΟΡΙΣΜΟΣ 135

Έστω $(V,\langle\ \rangle)$ χώρος εσωτερικού γινομένου (Χ.Ε.Γ) και W,L υπόχωροι του V. Λέμε ότι W,L είναι **ορθοσυμπληρωματικοί** αν $V=W+L$ και οι W,L είναι ορθογώνιοι (δηλ. $\langle w,l\rangle=0$ $\forall w\in W$ και $l\in L$

Τότε από Πρόταση 134 έχουμε και ότι $V = W \oplus L$ δηλ το άθροισμα $W+L$ είναι ευθύ

ΠΡΟΤΑΣΗ 136 α

$(V,<\ >)$ Χ.Ε.Γ W, L, L' υπόχωροι του V ώστε W, L ορθοσυμπληρωματικοί και W, L' ορθοσυμπληρωματικοί Τότε $L = L'$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (μοναδικότητας) Έστω $l \in L$. Αφού $V = W + L'$ (από υπόθεση) υπάρχει $w \in W$ και $l' \in L$ ώστε $l = w + l'$. Αφού L, W και L', W ορθογώνιοι έχουμε $0 = <l, w> = <w + l', w> = <w,w> + <l', w> = <w,w>$ Άρα $<w,w> = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow w = 0_V$ Άρα $l = l'$ Άρα δείξαμε ότι $L \subseteq L'$ Ομοίως δείχνουμε ότι $L' \subseteq L$ Άρα $L = L'$

ΟΡΙΣΜΟΣ 136 β

Έστω $(V,<\ >)$ Χ.Ε.Γ, W υπόχωρος του V. Θέτουμε $W^{\perp} = \{x \in V$ x κάθετο στο $W\} = \{x \in V$ $<x, w> = 0_{\mathbb{R}}$ για κάθε $w \in W\}$

ορθογώνιο συμπλήρωμα

ΠΡΟΤΑΣΗ 136 c

Έστω $(V,<\ >)$ Χ.Ε.Γ πεπερασμένης διάστασης και W υπόχωρος του V τότε $W, W^{\perp}$ είναι ορθοσυμπληρωματικοί

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Εύκολα βλέπουμε $W^{\perp}$ υπόχωρος του V (γιατί $<x,w> = <x', w> = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow <x, w+w'> = 0_{\mathbb{R}}$ κλπ)

Πρέπει ν.δ.ο (i) $V = W + W'$, (ii) $W, W^{\perp}$ ορθογώνιοι

Το (ii) είναι φανερό απ' τον ορισμό του $W^{\perp}$. Δείχνουμε $V = W + W'$ Συμβολίζουμε $\pi: V \to W$ την ορθογώνια προβολή του Ορισμού 133. Έστω $v \in V$ Τότε $v = \pi(v) + (v - \pi(v))$ Έχουμε δείξει ότι $\pi(v) \in W$ και $v - \pi(v)$ ορθογώνιο στο W Άρα $v - \pi(v) \in W^{\perp}$ και το αποτέλεσμα έπεται $(W + W^{\perp} = V)$

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 137

Έστω $(V,<\ >)$ Χ.Ε.Γ πεπερασμένης διάστασης και W υπόχωρος του V ο αλγόριθμος υπολογίζει το $W^{\perp}$

ΒΗΜΑ 1ο Βρίσκουμε βάση $g = (g_1, g_2, \ldots, g_p)$ του W (από γρ I)

ΒΗΜΑ 2ο Όπως στην γρ. I επεκτείνουμε την βάση g του W σε βάση $\hat{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_p, g_{p+1}, \ldots, g_n)$ του V

ΒΗΜΑ 3ο Στην διατετ. βάση (χωρίς να αλλάξουμε την σειρά των g_i) εφαρμόζουμε αλγόριθμο Gram-Schmidt (Αλγ 126) και καταλήγουμε σε ορθοκανονική βαση $e=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ του V

ΒΗΜΑ 4ο. Εχουμε 1) $W^\perp = \langle e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n \rangle$

2) Τα $e_1,\dots,e_p$ ορθ βαση του W

3) Τα $e_{p+1},\dots,e_n$ ορθ. βαση του $W^\perp$

ΑΣΚΗΣΗ 138 a

$(V,\langle\,\rangle)$, W όπως στον αλγόριθμο 137 $\pi: V \to W$ ορθ. προβολή. Δείξτε ότι $W^\perp = \operatorname{Im} T$, όπου $T: V \to W$ με $T(z) = z - \pi(z)$

Αν $V = W \oplus W'$. Αν $w \in W, \rho \in W^\perp$ δείξτε ότι

(ii) Από προηγούμενη Πρόταση

$\pi(w+\ell) = w$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 138 b

Αφού $V = W \oplus W^\perp \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} W + \dim_{\mathbb{R}} W^\perp \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} W^\perp = \dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} W$

ΙΣΟΜΕΤΡΙΕΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ 139

Εστω $(V,\langle\,\rangle)$, $(V',\langle\,\rangle')$ δύο Χ.Ε.Γ. Μια απεικόνιση $T: V \to V'$ λέγεται ισομετρία αν η T είναι γραμμική, 1-1 και ΕΠΙ και $\langle T(u), T(w)\rangle' = \langle u, w\rangle \ \forall u, w \in V$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ

Εστω $T: V \to V'$ γραμμική, τα ακόλουθα ειναι ισοδύναμα:

(i) T ισομετρία (ii) T 1-1, ΕΠΙ και $\|T(v)\| = \|v\| \ \forall v \in V$.

Απόδειξη (i) ⇒ (ii) Αφού T ισομετρία έπεται ότι T 1-1 και ΕΠΙ, έχουμε ότι $v \in V$ Εχουμε $\|T(v)\| = \sqrt{\langle T(v), T(v)\rangle} \overset{\text{ισομ}}{=} \sqrt{\langle v, v\rangle} = \|v\|$

(ii) ⇒ (i) Υποθέταμε $T: V \to V'$ 1-1, ΕΠΙ και $\|T(v)\| = \|v\|$ για κάθε $v \in V$

Ευκολα βλέπαμε για $v, w \in V$ ότι $\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \langle v,v\rangle + 2\langle v,w\rangle + \langle w,w\rangle$

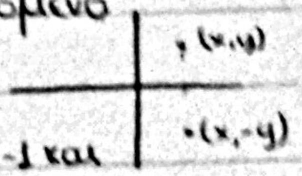
$\Rightarrow \langle w, v\rangle = \dfrac{\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2}{2}$ Ομοιως για $\langle x, y\rangle = \dfrac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}$

Αρα για $v, w \in V$ $\langle T(v), T(w)\rangle' = \dfrac{\|T(v+w)\|^2 - \|T(v)\|^2 - \|T(w)\|^2}{2}$

απουσία για T $= \dfrac{\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2}{2} = \langle v, w\rangle$ Αρα το (i) ισχύει

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 140

Έστω $V = \mathbb{R}^2$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο



(i) Η $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $T(x,y) = (x,-y)$ είναι ισομετρία από πρόταση 139 γιατί φανερά T 1-1 και

επί και $\|T(x,y)\| = \sqrt{x^2+(-y)^2} = \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|$

(ii) Έστω $\varphi \in \mathbb{R}$ $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $T(x,y) = (x\sigma\upsilon\nu\varphi + y\eta\mu\varphi, -x\eta\mu\varphi + y\sigma\upsilon\nu\varphi)$ Τότε μετά τις εύκολες πράξεις βλέπουμε ισομετρία (η T είναι "στροφή" κατά γωνία φ)

(iii) Η απεικόνιση $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $T(x,y) = (x+y, y)$ δεν είναι ισομετρία γιατί

$\|T(x,y)\| = \sqrt{(x+y)^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2+(y^2+2xy)}$ Για παράδειγμα $\|T(0,1)\| = \|(1,1)\| = \sqrt{2} \neq 1$

$= \|(0,1)\|$